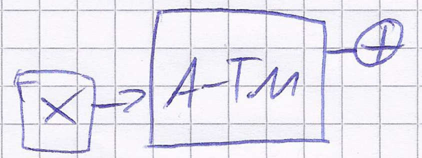
TheGI 2

14.06.11



WH / Mitteilung: $A \subseteq \Sigma^*$

A semi-entscheidbar

$\Leftrightarrow$ χ'_A berechenbar $\quad x \in A \quad x \mapsto 1$; $\quad x \notin A \quad x \mapsto \perp$

$\Leftrightarrow$ $A = T(M)$ (Als Sprache einer det. oder nicht det. TM)

$\Leftrightarrow$ A Typ-0

$\Leftrightarrow$ A rekursiv aufzählbar

A entscheidbar

$\Leftrightarrow$ χ_A berechenbar $\quad x \in A \quad x \to 1$; $\quad x \notin A \quad x \to 0$

$\Leftrightarrow$ $A = T(M)$

+ M hält auf allen Eingaben!

Kodierung und Selbstanwendung

~~TM~~ TM $M = (Z, \Sigma = \{0,1\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$

$\rightsquigarrow$ durchnummerieren: $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$

$\Gamma = \{a_0, a_1 \dots a_k\}$

zunächst kodieren in $\{0, 1, \#\}$

Transition $(z_i, a_j, z_{i'}, a_{j'}, y) \in \delta$

$\rightsquigarrow$ $w_{i,j,i',j',y} := \#\#\, BIN(i) \# BIN(j) \# BIN(i') \#$
$BIN(j') \# BIN(m)$

mit $m := \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N \end{cases}$

$BIN(i) :=$ Bin.-Kodierung von i.

Kodierung von $\{0,1,\#\}$ in $\{0,1\}$ vermöge

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 00 \\ 1 &\mapsto 11 \\ \# &\mapsto 01 \quad (10) \end{aligned}$$

Also Kodierung von M als

$$M \mapsto \langle M \rangle \in \{0,1\}^*$$

Def.: Das spezielle Halteproblem (Selbstanwendbarkeitsproblem) ist die Sprache

$$K := \{ w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf Eingabe } w \}$$

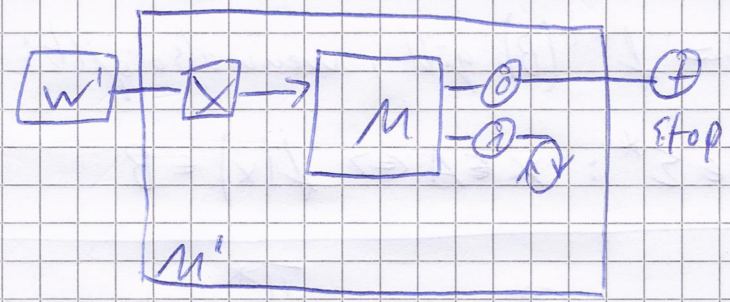
wobei M_w die durch w kodierte TM ist.

Satz: Das spez. Halteproblem ist unentscheidbar.

Der Beweis: ↯: Sei K entscheidbar.

$\Rightarrow \chi_K$ ist berechenbar durch TM M.

Konstruiere TM M', die M simuliert und bei Ausgabe 0 von M stoppt und bei Ausgabe 1 von M in eine Totschleife geht.



Sei $w' := \langle M' \rangle$. Dann gilt:

M' bei Eingabe w' hält $\Leftrightarrow$ M bei Eingabe w' gibt eine 0 aus

$\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad \chi_K(w') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w' \notin K$

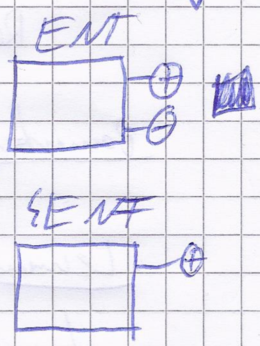
$\Leftrightarrow \quad M'$ bei Eing. $\langle M' \rangle = w'$ hält nicht ↯

Bemerkung

K ist semi-entscheidbar

$\underbrace{\text{Co-}K}_{}$ ist nicht semi-entscheidbar

Compl. von K $\{0,1\}^* \setminus K$



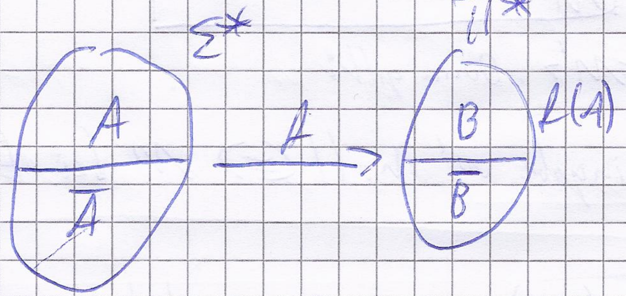
Entscheidbarkeitsnachweise durch Reduktion

Def. Eine formale Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt <u>reduzierbar</u> auf eine Sprache $B \subseteq \Pi^*$ (in Zeichen $A \leq B$) wenn es eine totale berechenbare Funktion $f: \Sigma^* \to \Pi^*$ mit

$A = f^{-1}(B)$ gibt, wenn also gilt:

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$

Bild:



Bsp.

- Für jedes entscheidbare A ist χ_A eine Reduktion von A auf die Menge $\{1\}$

Bemerkung Es gilt $A \leq B \Leftrightarrow \bar{A} \leq \bar{B}$

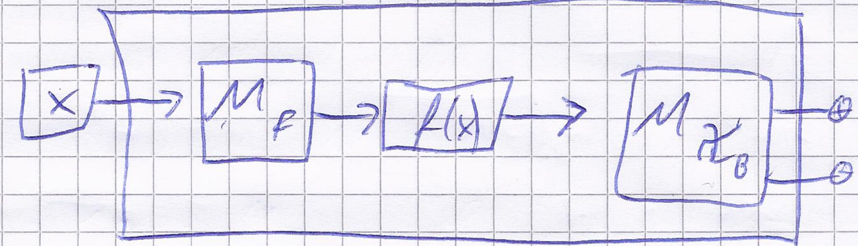
Lemma: Gilt $A \leq B$ und ist B entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar), so ist auch A entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar.)

Beweis(idee): Ist $A = f^{-1}(B)$, so folgt:

$$\chi_A = \chi_B \circ f : x \mapsto f(x) \mapsto \chi_B\big(f(x)\big) = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in B$$
$$\Leftrightarrow x \in A$$
$$\Leftrightarrow \chi_A(x) = 1$$

Sind also χ_B und f berechenbar, so auch χ_A (Analog für χ'_B und χ'_A)



Def.: Das „allg." Halteproblem:

$$H := \{ w\#x \mid \exists \underbrace{M : M = \langle w \rangle}_{M_w} \text{ und } M \text{ hält auf Eing. } x \}$$

Satz: H ist unentscheidbar

~~Beweis~~ Beweis: Zeige: $K \leq H$

Wähle $f : \begin{cases} \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1,\#\}^* \\ w \longmapsto w\#w \end{cases}$

Dann ist $f^{-1}(K) = H$ w.z.z.w. ■