TheGI 2 VL

21.06.11

WH:

$K := \{ w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält auf } w \}$ spez. Halteproblem

$H := \{ w\#x \mid \exists M : w = \langle M \rangle \text{ und } M \text{ hält auf } x \}$

allg. Halteproblem

Reduktion: $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Pi^*$ sodass

$\forall x \in \Sigma^* : x \in A$ gdw. $f(x) \in B$

$\boxed{K \leq H}$

Def.: das Halteproblem auf dem leeren Band ist def. zu: $H_0 := \{ w \mid w\#\varepsilon \in H \}$

Satz: H_0 ist unentscheidbar

Beweis: Durch Reduktion von H auf H_0 ($H \leq H_0$)

Geg: $w\#x$, Frage: Hält M_w auf x?

zu x ist eine einfache TM $A(x)$ zu konstruieren die angesetzt auf das leere Band das Wort x ausgibt. Die zu w und x konstruierte TM $M(w,x)$ besteht dann in der Anw. von $A(x)$ gefolgt von M_w

Dann ist die Red-Abb.:

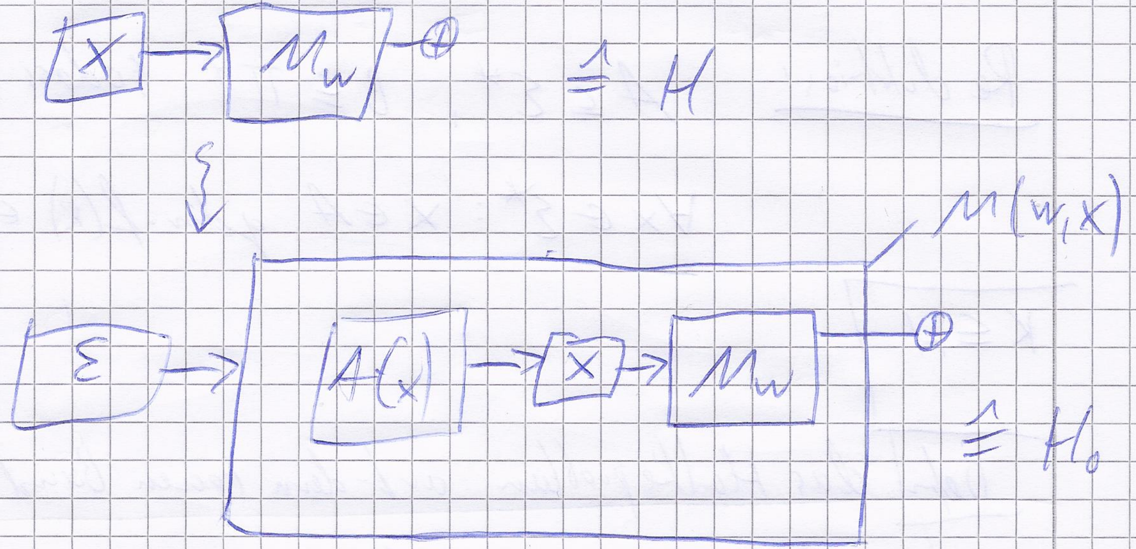
$$w\#x \rightarrow f(w\#x) := \langle M(w,x) \rangle$$

berechenbar und es gilt

siehe nächste Seite

$$\forall w\#x: \underbrace{M_w \text{ hält auf } x}_{w\#x \in H} \iff \overbrace{M(w,x) \text{ hält auf } \varepsilon}^{\langle M(w,x)\rangle \in H_0}$$

Bild (Idee)



also $\quad H \leq H_0 \implies H_0$ unentscheidbar! ∎

Satz von Rice:

Sei R die Menge aller (Turing-) berechenbaren Funktionen. Sei weiter $S \subseteq R$ eine nichttriviale Teilmenge von R d.h.

$$S \neq \emptyset \text{ und } S \neq R$$

Dann ist die Sprache

$$C(S) := \{ w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } S \}$$

unentscheidbar

Beweis: Es sei Ω die Fktn. mit leeren Def.-Bereich

Fall 1: $\Omega \in \mathcal{S}$: Dann Red von H_0 auf

$$C_1(\overline{\mathcal{S}}) = C_1(R \setminus \mathcal{S}) \quad (\text{bzw. } \Pi_0 \leq C_1(\mathcal{S}))$$

Wegen $\mathcal{S} \neq R$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$ $\exists$ eine TM Q, deren berechnete Fktn. q nicht in $\mathcal{S}$ liegt.

Zu gegebenem w betrachten wir die TM $M(w)$, die auf bel. Eing. y zunächst die TM M_w auf der leeren Eingabe sim. und nur wenn M_w hält anschließend Q auf y simuliert.

Die von $M(w)$ berechnete Fkt ist dann Ω wenn M_w nicht hält und q andernfalls.

weggewischt!

D.h. $w \in H_0 \Leftrightarrow \langle M(w) \rangle \notin$

...

Da war die „Wischpause" schneller -.-

Fall 2 gilt übrigens analog ...

Korollar: (Folgt direkt aus dem Satz von Rice.)

Folg. Fragestellungen bzgl. der Leistung von TM'n sind unentscheidbar.

I a) die berechnete Fktn. ist konstant

b) die berechnete Fktn ist total

II a) die akz. Sprache ist leer

b) die akz. Sprache ist endlich

c) ——— " ——— regulär Typ 3

d) ——— " ——— kontextfrei Typ 2

e) ——— " ——— kontextsensitiv Typ 1

Typ 0 sind keine triv. Teilmenge von R.
TM berechnen ja genau die Typ 0 - Sprachen.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Def. Für ein (endl.) Alphabet sei das Post'sche Korrespondenzproblem (PCP) die Menge:

$$PCP := \{ \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k) \rangle \mid k > 1, x_i, y_i \in \Sigma^* \; \exists n \geq 1 \; \exists i_1, i_2, \dots i_n \in \{1, \dots, k\} : x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n} \}$$

Bsp 1:

$$\langle (1, 101), (10, 00), (011, 11) \rangle \in PCP$$

$i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 2$, $i_4 = 3$

1	011	10	011
101	11	00	11
i_1	i_2	i_3	i_4

✓

Bsp 2: $\langle (1,10), (10,1), (01,0), (0,001) \rangle \notin PCP$

nicht lösbar weil „suffixfrei"

Mitteilung: PCP ist unentscheidbar!

aber semi-entscheidbar.

Beobachtung:

Für $|\Sigma| = 1$ ist PCP entscheidbar!

Für $k=2$ ist entscheidbar

$k = 3 \dots 9$ ist offenes Problem

$k > 9$ unentscheidbar.