TheGI 2 VL

05.07.11

Def. Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik i.Z. SAT ist die Frage, ob eine geg. aussagenlogische Formel F erfüllbar ist, ob es also eine $\{0,1\}$-wertige Belegung der in F verwendeten Variablen derart gibt, dass F zu 1 ausgewertet wird.

$$SAT := \{ F \in \mathcal{F} \mid \exists \varphi : \varphi(F) = 1 \}$$

Satz (Cook):

SAT ist NP-vollständig

Beweisidee:

1. $SAT \in NP$
2. SAT ist NP-hart: $\forall L \in NP$ $L \leq^p SAT$

zu 1. – rate φ, rate $x_1 \ldots x_n$

– werte $\underset{=1\,?}{\varphi(F)}$ aus.

Wh: Ist A NP-hart und $A \leq B$ so ist B NP-hart

III 3. Weitere NP-~~harte~~ vollständige Probleme

3-SAT

geg: Aussagenlog. Formel F in KNF (konj. Normalform) mit höchstens 3 Literalen pro Klausel

Frage: ist F erfüllbar?

Bsp: $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$

$x_3 = 0$

$x_2 = 0$

$x_1 = 1$

$x_4 = 0$

Mitteilung: 3-SAT ist NP-vollständig.

Beweisskizze:

1. 3-SAT $\in$ NP
2. 3-SAT ist NP-hart

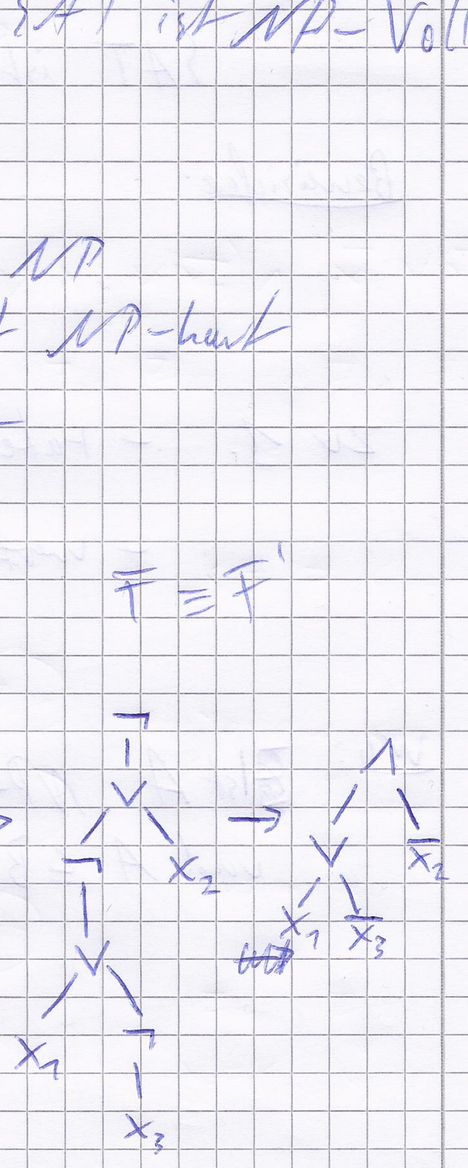
SAT $\leq^p$ 3-SAT

$\downarrow$

$F \rightsquigarrow F'$ $\quad F \equiv F'$

SAT $\leq^p$ 3-SAT

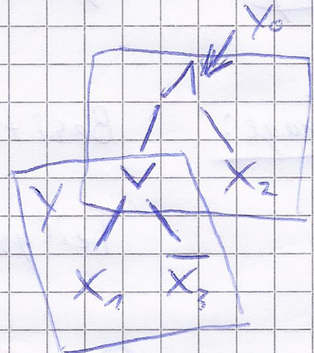
Bsp: $F = \overline{\overline{x_1 \vee \bar{x}_3} \vee x_2}$ $\longrightarrow$



1. Wende de Morgans Regeln an um "¬" zu den Blättern zu ziehen.

2. ordne inneren Knoten Variablen $y_0, y_1, \ldots$ zu.

3. fasse (Gedanklich) Dreiergruppen zusammen.



$$F = F'' = y_0 \wedge (y_0 \Leftrightarrow (y_1 \wedge \bar{x}_2)) \wedge (y_1 \Leftrightarrow (x_1 \vee \bar{x}_3))$$

$$(a \Leftrightarrow (b \vee c)) \equiv (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (a \vee \bar{c})$$

$$(a \Leftrightarrow (b \wedge c)) \equiv (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{a} \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c})$$

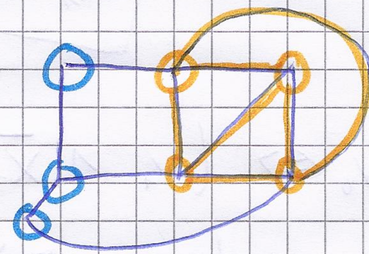
Einsetzen:

$$F \equiv F' = y_0 \wedge (\bar{y}_0 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_0 \vee \bar{x}_2) \vee (y_0 \vee \bar{y}_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee \bar{x}_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (y_1 \vee x_3)$$

Clique

geg: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Besitzt G einen Vollständigen Teilgraph der Größe mind. k?



$V' \subseteq V : |V| \geq k$

$\forall u,v \in V' : \{u,v\} \in E$

Mitteilung: Clique ist NP-vollständig.

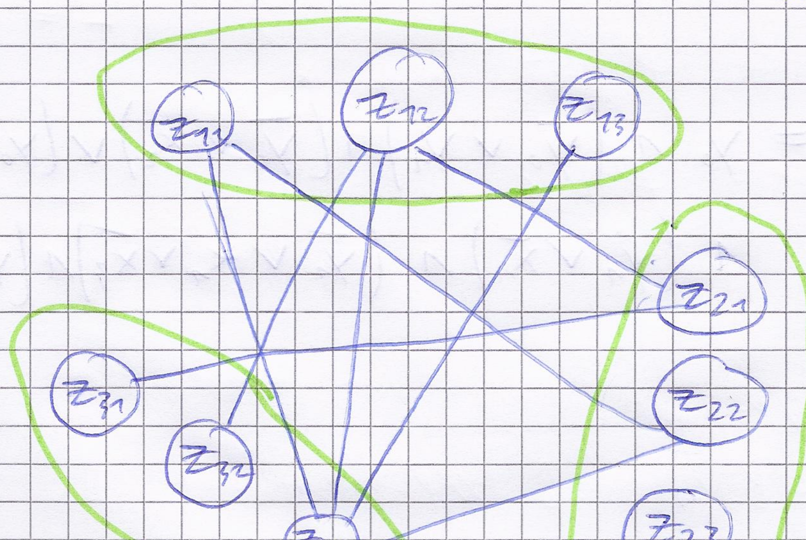
Beweisidee:

Clique $\in$ NP

3-SAT $\leq^P$ Clique

$$F = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$

$z_{11} \quad z_{12} \quad z_{13} \quad z_{21} \quad z_{22} \quad z_{23} \quad z_{31} \quad z_{32} \quad z_{33}$



$k = 3$

$K = \#$ Klauseln

je eine Kante, wenn beide Terme gleichzeitig wahr sein können

$z_{11} \rightarrow x_1 = 1 \qquad z_{22} \rightarrow x_2 = 1 \qquad z_{33} \rightarrow x_3 = 1$