TheGI 2 W 19.4.11

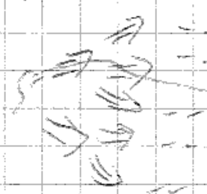
- Ab heute: „Zentralübung" 14–16 H2053
  mit Sepp Hartung
- Gruppen vom Freitag (Karfreitag!) Verteilen sich auf andere Gruppen
- Nächste Woche (→ Montag = Feiertag): Tutorensprechstd. Di 12^{30}

I (Endliche) Automaten

⇝ Typ-3-Sprachen

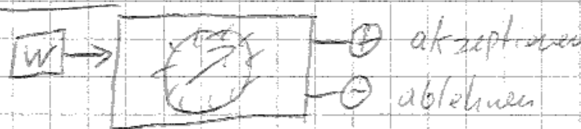
Motivation:

„Grammatiken generieren" ⇔ „Automaten akzeptieren"



$\underline{\underline{w}} \in \Sigma^*$ $(\Sigma = \{0,1\})$ $q_0 w \vdash q_1 w \vdash^* \dots q_f$

bildlich:



Def.

a) Ein (deterministischer) endl. Automat (DFA) (engl. = finite)
ist ein Quintupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

- ▶ Z: nichtleere, endl. Menge von Zuständen
- ▶ Σ: nichtleeres, endl. Alphabet von Eingabezeichen mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- ▶ $\delta: Z \times \Sigma \to Z$ ist Überführungsfunktion
- ▶ $z_0 \in Z$: Startzustand
- ▶ E Menge der Endzustände

b) Zu $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ konstruieren wir die Abb.

$\boxed{\varepsilon = \text{epsilon} = \text{leeres Wort}}$ $\hat{\delta}: Z \times \Sigma^* \to Z$

induktiv: $\hat{\delta}(z, \varepsilon) := z$ für $z \in Z$

und $\hat{\delta}(z, ax) := \hat{\delta}(\delta(z,a), x)$ für $z \in Z, a \in Z, x \in Z^*$

c) Die von M akzeptierte Sprache ist $T(M)$ target

$$T(M) := \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(z_0, x) \in E\}$$

Bsp.: $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$; $\Sigma = \{0, 1\}$;
$E = \{z_2\}$

Binär = 2-elementig, nicht zwingend 0-1

liest Zeichen — ist in — Folgezustände

δ	z_0	z_1	z_2
0	z_0	z_2	z_1
1	z_1	z_0	z_2

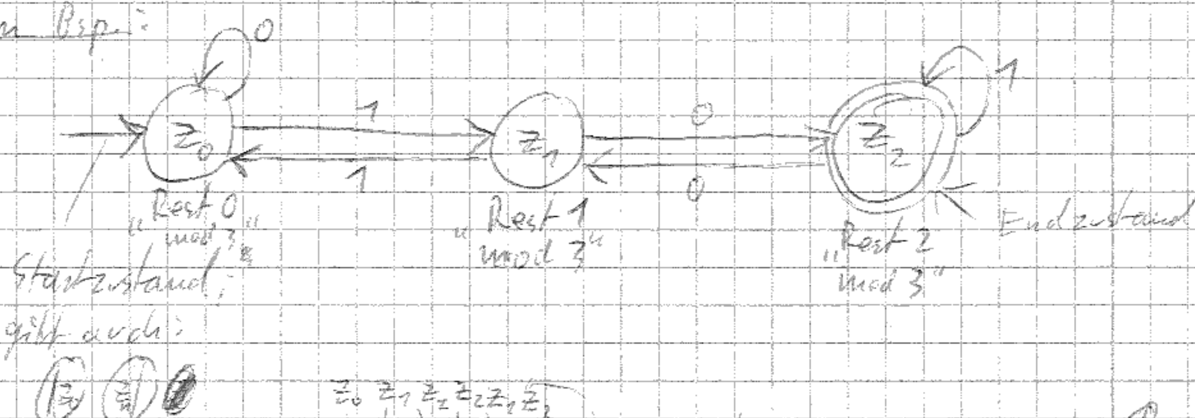
Es gilt für $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ merken: 5 Elemente

$$T(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Binärdarstellung einer Zahl } n \text{ mit } n \bmod 3 \equiv 2\}$$

(Schneller als endl. Automat geht nicht, da linearer Aufwand.)

Veranschaulichung endlicher Automaten durch Zustandsgraphen.

Am Bsp.:



$z_0\ z_1\ z_2\ z_2\ z_1\ z_2$

1	0	1	0	0	E

Endzustand + leeres Wort = $\oplus$
wenn $z_2 \notin E \Rightarrow \ominus$

$10100 = 20$; $20 \bmod 3 = 18$ rest 2

„Beispielhafter" Beweis für $T(M)$

z. B. $n = 3 \cdot a + 2$

$\underbrace{\langle n \rangle 1_0}_{\text{Binärcode von } n} \overset{\wedge}{=} 2\underset{\uparrow \, 3a+2}{n} + \cancel{1} = 6a + \cancel{5}_4 = \underbrace{6a+3}_{\equiv 0 \bmod 3} + \underline{\cancel{2}\,1}$

$\equiv 1 \bmod 3$

$2n+1$

muss für alle Fälle (Bereiche) gezeigt werden. — Formal nicht ausreichend

---

Satz: Zu jedem endl. Automaten M gibt es eine Typ 3-Grammatik (reguläre).
G mit $T(M) = L(G)$

Beweisidee: $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

definiere $G = (V, \Sigma, P, S)$

vermöge $V := Z$, $S := z_0$, und

$$P := \{ z_i \to a z_j \mid \delta(z_i, a) = z_j \}$$
$$\cup \{ z_i \to a \mid \delta(z_i, a) \in E \}$$
$$\cup \{ z_0 \to \varepsilon \mid z_0 \in E \}$$

Einfacher Pfeil — leeres Wort!

Es gilt:

$$x = a_1 \ldots a_n \in T(M) \iff \hat{\delta}(z_0, x) \in E$$
$$\iff \exists z_1, \ldots, z_n : \delta(z_{i-1}, a_i) = z_i \land z_n \in E \quad \forall_{i=1 \ldots n}$$
$$\iff \exists z_1, \ldots z_n : z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \ldots$$

doppelter

$$\Rightarrow a_1 \ldots a_{n-1} z_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_1 \ldots a_n \text{ falls } z_n \in E$$

$\delta(z_{n-1}, a_n) \in E$

$$\iff x \in L(G)$$

■