Th GI VL

3.5.11

$\cancel{B})$

Der Satz von Myhill-Nerode

Def. Zu jedem $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die Rechtskongruenz R_L vermöge (für $x, y \in \Sigma^*$)

Relation über L definiert

$$x R_L y \iff [\forall z \in \Sigma^* : xz \in L \iff yz \in L$$

Partition / Zerlegung von Σ^*

Reguläre Sprache $\hat{=}$ endliche Anzahl von Äquivalenzklassen

#(Äquiv. klassen) = 5

Satz von Myhill-Nerode:

$L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann regulär, wenn der Index von R_L endlich ist.

$$\text{Index}(R_L) := |\{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}|$$

Beweis:

1.) „regulär $\Rightarrow$ endl. Index"

Es sei $M = \{Z, \Sigma, \delta, z_0, E\}$ ein DFA mit $\underbrace{T(M)}_{\text{Sprache des Automaten}} = L$.

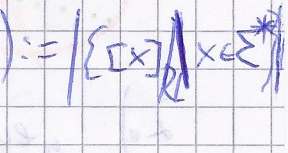
Def. $R_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ vermöge

(Vor) $$x R_M y :\iff \underbrace{\hat{\delta}(z_0, x)}_{\in Z} = \underbrace{\hat{\delta}(z_0, y)}_{\in Z}$$

$\rightsquigarrow R_M$ ist Äquiv. rel., die $(xz, yz \in R_M)$

$$x R_M y \Rightarrow \forall z \in \Sigma^* : \overbrace{xz \; R_M \; yz}$$

Beispiel:



Forts. nächste Seite

Es gilt: $R_M \subseteq R_L$ d.h. $x R_M y \Rightarrow x R_L y$

(„Verfeinerung")

Denn: Wenn $\hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y)$, so gilt für bel. $z \in \Sigma^*$:

$$xz \in L \iff \underbrace{\hat{\delta}(z_0, xz) \in E}_{xz \text{ in Sprache des Automaten}}$$

Akzeptierende Endzustände

$$= \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, x), z) \overset{(Vor.)}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, y), z) = \hat{\delta}(z_0, yz) \in E$$

$$\iff yz \in L$$

was zu zeigen war.

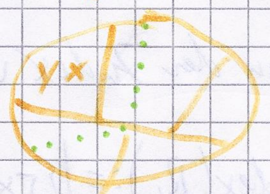
Zustandsmenge (M)

Daher ist der Index$(R_L) \leq$ Index$(R_M) \leq |Z| \underset{\text{endl. Automat}}{<} \infty$

„Es gilt" siehe (Vor.)

$\sim :=$ in Relation mit

$x \tilde{R}_M y$ $x \tilde{R}_L y$

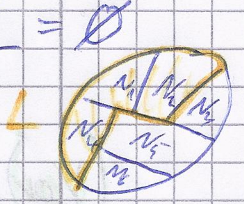


2.) „endl. Index $\Rightarrow$ regulär": $k \in \mathbb{N}$

Es seien $N_1, \ldots, N_k \subseteq \Sigma^*$ die endlich vielen Äquivalenzklassen von R_L.

Dann gilt für jedes j: $N_j \subseteq L$ oder $N_j \cap L = \emptyset$

(„weil Def. R_L mit $z = \varepsilon$ ...")



Def. DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ vermöge

$Z := \{N_1, \ldots, N_k\}$

$z_0 := [\varepsilon]_{R_L}$ $(= \{x \mid x R_L \varepsilon\})$ $= N_1$

$E := \{[x]_{R_L} \mid x \in L\}$ $(= \{N_i \mid N_i \subseteq L\})$

$\delta([x]_{R_L}, a) := [xa]_{R_L}$ (wohldefiniert, da R_L Rechtskongruenz)

$a \in \Sigma$

forts. nächste Seite

Dann gilt: $\hat{\delta}([\varepsilon]_{R_L}, x) = [x]_{R_L}$

und daher $x \in T(M) \Leftrightarrow \hat{\delta}(z_0, x) \in E$

$\Leftrightarrow [x]_{R_L} \in E$

$\Leftrightarrow x \in L$ ■

Anwendungsbeispiel 1

$L_1 = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$ nicht regulär }

$i \neq j :\Rightarrow \neg (a^i R_{L_1} a^j)$

denn $a^i \underbrace{b^i}_{z} \in L_1$, $a^j \underbrace{b^i}_{z} \notin L_1$

$\Rightarrow$ Index (R_{L_1}) unendlich

$\xRightarrow[\text{Nerode}]{\text{Myhill}}$ nicht regulär

Anwendungsbeispiel 2

$L' := \{0,1\}^* 1$ ≙ regulärer Ausdruck

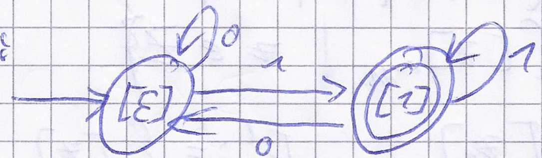
$[\varepsilon]_{R_{L'}} = \{ \varepsilon, 0, 00, 10, \dots \}$ $\forall z \in \{0,1\}^*$

$= \{\varepsilon\} \cup \{0,1\}^* 0$ $xz \in L' \Leftrightarrow yz \in L'$

$\underbrace{\varepsilon z}_{z} \in L' \Leftrightarrow 0z \in L'$

$[1]_{R_{L'}} = \{ 1, 01, 11 \dots \} = \{0,1\}^* 1$

$\rightarrow$ DFA:



Minimalautomaten:

Zu regulärem $L \subseteq \Sigma^*$ sei M_L der über Rel R_L konstruierte DFA.

Es gilt: M_L ist ein minimaler Automat:

Unter allen DFA's mit $T(M') = L$ besitzt M_L die kleinstmögliche Zustandsanzahl.

Zwei Zustände z, z' eines DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ heißen äquivalent (in Zeichen $z \sim_M z'$), wenn gilt: $\forall x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(z, x) \in E \iff \hat{\delta}(z', x) \in E$

M heißt reduziert, wenn M keine äquivalenten Zustände enthält.

Dann gilt:

$$M \text{ minimal} \iff M \text{ reduziert}$$

~~und~~

Daher Min einer DFA M durch Best von $\sim_M$

Der zu M äquiv. reduzierte DFA M' bestimmt sich zu: $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ vermöge:

$Z' := \{ [z]_{\sim_M} \mid z \in Z \}$

$z_0' := [z_0]_{\sim_M}$, $E' := \{ [z]_{\sim_M} \mid z \in E \}$

und $\delta' : Z' \times \Sigma \to Z'$: $\delta'([z]_{\sim_M}, a) := [\delta(z, a)]_{\sim_M}$

M' ist reduziert!

Alg. zur Best. von $\sim_M =: R$

- $R : Z \times Z \to \{0, 1\}$ (0 $\hat{=}$ false, 1 $\hat{=}$ true)
- $R \leftarrow 1$ (Alle Einträge 1)
- Für $(z, z') \in (E \times (Z \setminus E)) \cup ((Z \setminus E) \times E)$: $R(z, z') \leftarrow 0$
- Setze $R(z, z') = 0$ wenn $\exists a \in \Sigma$ mit $R(\delta(z, a), \delta(z', a)) = 0$ solange bis sich keine Änderung mehr ergibt

Am Schluss: $z \sim_M z' \iff \underbrace{R(z, z') = 1}_{\text{equiv.}}$