# TheGI VL

10.5.11

## Abschlusseigenschaften reg. Sprachen

**Satz:** Die reg. Sprachen sind konstruktiv abgeschlossen gegen

$L_1, L_2$ reg $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ reg

1. Vereinigung, Schnitt, Komplement ($\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$)
2. Produkt
3. Kleene'sche Hüllenbildung.

Bew.
Kleensche Hülle

Komplement: „Vertausche" End und nicht-Endzustände im DFA

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ T(M_1) & T(M_2) \end{array}$$

$$Z = Z_1 \times Z_2$$

$$\delta = \delta_1 \times \delta_2$$

$$\delta((q_1, q_2), a) = (\underbrace{\delta_1(q_1, a)}_{\in Z_1}, \underbrace{\delta_2(q_2, a)}_{\in Z_2})$$
$$a \in \Sigma$$

$$z_0 = (z_{0,1}, z_{0,2})$$

$$E = (E_1 \times E_2)$$

## Anw. Abschlusseigenschaften

→ Beweis von Nichtregularität

$$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) = \#_b(x)\}$$

Anz. der b in x

nicht reg?

$$L \cap a^* b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

reg

nicht reg

Wäre L regulär, so müsste es der Schnitt auch sein ↯

# Bemerkung zur Entscheidbarkeit

- Wortproblem reg. Sprachen ist entscheidbar.

  Geg. $L$, $x$, Frage: $x \in L$? ✓

  $T(M) = L$ (simuliere $M$ auf $x$ ...)

- Leerheitsproblem: ist entscheidbar

  Geg.: $M$. Frage: $T(M) = \emptyset$ ?

  $T(M) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \Sigma^*: |x| \leq r$ $|Z| = r$ $Z = \{z_0, \dots, z_f\}$ endlich

- Endlichkeitsproblem

  Geg: $M$, Frage: $T(M) < \infty$ ?

  $\rightsquigarrow$ Entscheidbar vermöge Zyklen- und Wegesuche

- Schnittleerheitsproblem:

  Geg: $M_1, M_2$ Frage: $\underbrace{T(M_1) \cap T(M_2)}_{= T(M)} \neq \emptyset$

  Rückführung auf Leerheitsproblem. Abschlusseigenschaften

- Äquivalenzproblem

  Geg. $M_1, M_2$ Frage: $T(M_1) = T(M_2)$ ?

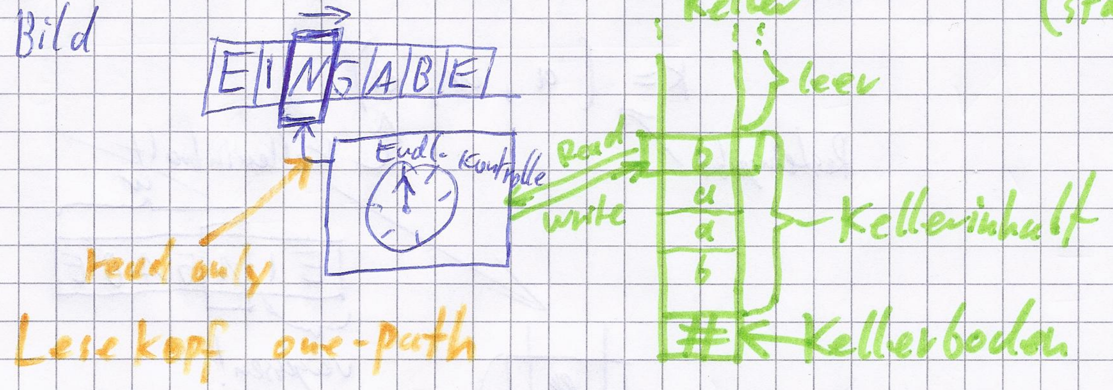
  ist entscheidbar!

  Minimiere beide Automaten und Löse das ~~Graph~~ zugehörige „Graph-Isomorphieproblem" der Zustandsgraphen

# II Kellerautomaten

PDA
„push-down"
⇕
(stack)

Bild




Kellerautomat = endl. Kontrolle + Kellerspeicher
(wie bisher)

Zust. Eingabe Kellersymbol

$$Z \times \Sigma \times \Gamma \longrightarrow Z \times (\{\varepsilon\} \cup \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \dots)$$

neue Symbole auf den Keller legen

$\Gamma^n \Rightarrow n =$ anz. d. Elemente

**Def.** Ein (nicht det.) Kellerautomat (kurz PDA oder NPDA) ist ein Sextupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ← Gartenzaun! wtf?

- endl. Zust. Menge → $Z$
- Eingabealphabet → $\Sigma$
- Kelleralphabet → $\Gamma$
- Startzustand → $z_0$
- Kellerboden-zeichen → $\#$

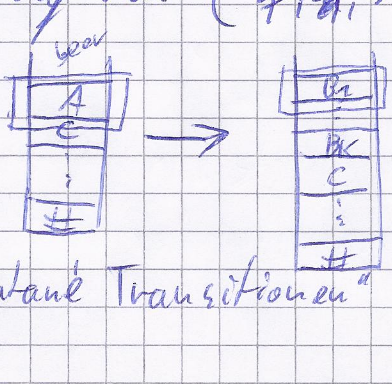
$$\delta \subseteq Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times Z \times \Gamma^*$$

gamma

endl. Menge von Transitionen

Anschauliche Bedeutung von $(q, a, A, q', B_1 \dots B_k) \in \delta$

Keller:




$k=0$ . „POP"

$k \geq 1$ . „PUSH"

$B_k = A \hat{=}$ keine Änderung

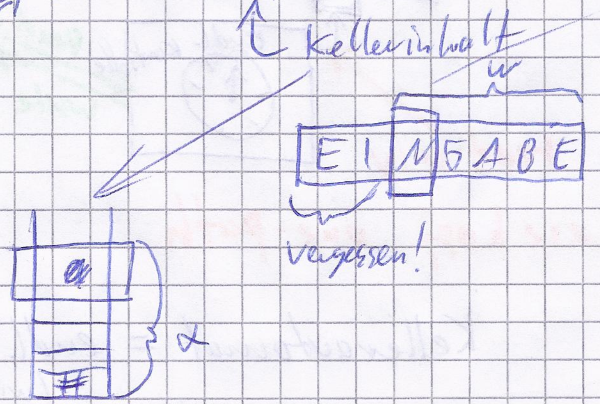
$a = \varepsilon$ : „spontane Transitionen"

Konfiguration eines PDA $M$
ist ein Tripel $k \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

$$k = (a, w, \alpha)$$

Resteingabe

Kellerinhalt




Übergangsrelation: $\vdash_M$

$$k = (z, a_1 \dots a_n, A_1 \dots A_m) \vdash^{a_1}_{M} k' = (z', \cancel{a_2}^{\,a_1} \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m)$$

falls $(z, a_1, A_1, z', B_1 \dots B_k) \in \delta$

$a_1 = \varepsilon$