The GI2VL

24.5.11

WH: **Satz:** $A \subseteq \Sigma^*$

$$\exists G : A = L(G) \iff \exists M : A = N(M)$$

G: KFG (Kontextfrei) $\qquad$ M: PDA

Bew. Idee

„$\Rightarrow$": $G = (V, \Sigma, P, S)$

Setze $M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$ (statt #)

wobei $(z, a, a, z, \varepsilon) \in \delta$

$(z, \varepsilon, A, z, \alpha) \in \delta$

falls $A \to \alpha \in P$

„$\Leftarrow$": („Tripelkonstruktion")

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$

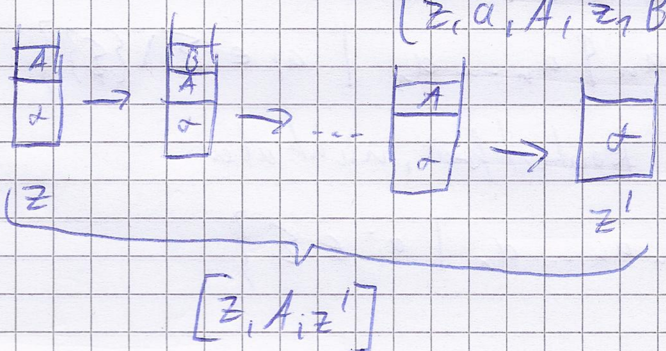
Ohne Einschränkung gilt:

„$(z, a, A, z', B_1 \dots B_k) \in \delta \Rightarrow k \leq 2$"

Wir setzen $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := \{S\} \cup (Z \times \Gamma \times Z)$ und

$$\begin{aligned}
P := &\{S \to [z_0, \#, z] \mid z \in Z\} \\
\cup &\{[z, A, z'] \to a \mid (z, a, A, z', \varepsilon) \in \delta\} \\
\cup &\{[z, A, z'] \to a[z_1, B, z'] \mid (z, a, A, z', B) \in \delta\} \\
\cup &\{[z, A, z'] \to a[z_1, B, z_2][z_2, C, z'] \mid \\
&\quad (z, a, A, z_1 BC) \in \delta, z', z_2 \in Z\}
\end{aligned}$$



Idee: (wobei $z, z' \in Z$, $w \in Z^*$, $A \in \Gamma$):

① $[z, a, z'] \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w$

gdw.

② $\langle z, w, A \rangle \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} \langle z', \varepsilon, \varepsilon \rangle$

Spezialfall: $A = \#$

$z = z_0$, $w =$ Eingabe

Beweis durch strukturelle Induktion

Was haben wir davon?

- jeden Kellerautomat $\Rightarrow$ Kellerautomat mit 1 Zustand
- jede Grammatik $\Rightarrow$ Greibach Normalform

Deterministisch kontextfreie Sprachen

CYK-Algorithmus (Cocke, Younger, Kasami) $O(n^3)$

Det. Kellerautomat: $O(n)$

Definition: (KA)

Ein PDA M heißt deterministisch, falls $\forall z \in Z, a \in \Sigma, A \in \Gamma$ gilt:

$$|\{(z, a, A, z', \alpha) \mid z' \in Z, \alpha \in \Gamma^*\} \cup \{(z, \varepsilon, A, z', \alpha) \mid z' \in Z, \alpha \in \Gamma^*\}| \leq 1$$

Deterministische Kellerautomaten akzeptieren per Endzustand, nicht per leeren Keller.

Eine Sprache heißt det. kontextfrei, wenn sie von einem det. PDA erkannt wird.

Bsp.: $\{a_1 \dots a_n \$ a_n \dots a_1 \mid a_i \in \Sigma \setminus \{\$\}\}$

ist det. kontextfrei, nicht aber

$\{a_1 \dots a_n a_n \dots a_1 \mid a_i \in \Sigma\}$

Abschlusseigenschaften

Mitteilung:

Det. kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

d.h. $L \subseteq \Sigma^*$ det.-kontextfrei $\Rightarrow \underbrace{\Sigma^* \setminus L}_{\text{Komplement von } L}$ det. kontextfrei

Satz: Det. kontextfreie Sprachen sind nicht unter Vereinigung und Schnitt abgeschlossen.

Beweis:
Betrachte: $\{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 1\} =: L_1$
und $\{a^n b^m c^m \mid n,m \geq 1\} =: L_2$

L_1, L_2 sind det. kontextfrei

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

nicht kontextfrei, also (det.) kontextfreie Sprachen nicht unter Schnitt abgeschlossen.

$L_1 \cap L_2 \overset{\text{DeMorgan}}{=} \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ ↯

Da det. kontextfreie Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen, können sie es nicht unter Vereinigung sein.

$$\boxed{\text{det. kontextfreie Sprachen} \;\hat{=}\; LR(k)\text{-Sprachen}}$$

Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen

Satz: Kontextfreie Sprachen sind konstruktiv abgeschlossen gegen

- ▶ Vereinigung „$L_1 \cup L_2$"
- ▶ Produkt „$L_1 \cdot L_2$"
- ▶ Stern $(L_1)^*$

$L_1 : G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$

$L_2 : G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$

$L_1 \cup L_2 : G = (V_1 \cup V_2, \Sigma, P, S)$

$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$

$S \to S_1 \cdot S_2$

$S \to \varepsilon \mid S S_1$

aber nicht gegen:

- ▶ Schnitt „$L_1 \cap L_2$" siehe det. Kontextfrei
- ▶ Komplement „$\Sigma^* \setminus L_1$" siehe oben (de Morgan)