TheGI 2 VL

07.06.11

WH:

Berechenbarkeit (von Funktionen)

$$\underbrace{\boxed{n_1, \dots, n_k}}_{\in \mathbb{N}^k} \longrightarrow \boxed{\text{Algorithmus} \to TM} \longrightarrow \underbrace{\boxed{f(n_1, \dots, n_k) =: m}}_{\in \mathbb{N}}$$

partiell (d.h. i.a. nicht total)

Bsp 2:

$$g(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls Dezimalbruchdarstellung von } n \text{ kommt irgendwo in der Dez.-bruchentwicklung von } \pi \text{ vor.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\pi = 3{,}14\dots$

Es ist nicht bekannt, ob berechenbar.

Bsp. 3

$$h(n) := \begin{cases} 1 & \text{in der Dez.-bruchentwicklung von } \pi \text{ kommen } n \text{ aufeinanderfolgende 7'en vor.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

h ist berechenbar!

Fall 1: Es gibt eine beliebig lange Folge aus $\{7\}^*$ in π.

Dann ist $h \equiv 1$

Fall 2: Es kommen maximal n_0 7'en hintereinander in π vor. Dann ist h def. durch:

$$h(n) := \begin{cases} 1, & n \leq n_0 \\ 0, & n > n_0 \end{cases}$$

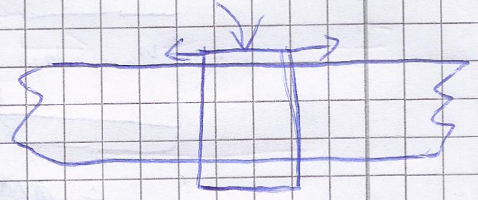
In jedem der (so vielen) Fälle ist h berechenbar!

(Aber wir kennen den Fall nicht.)

{ Church'sche These: „Intuitiv Berechenbar" $\hat{=}$ Turing-~~Berechen~~
-Berechenbar

<u>Turing – Berechenbarkeit:</u>

„TM = <u>Das</u> Modell"



<u>TM:</u>

- Akzeptieren von Sprachen:

$$z_0 x \vdash_M^* \alpha z \beta, \quad z \in E$$

- Berechnung von Funktionen

$$z_0 x \vdash_M^* z f(x), \quad z \in E$$

<u>Def.:</u> Eine Funktion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt <u>Turing-berechenbar</u>

gdw. es eine DTM M gibt, derart, dass für

alle $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m$$

$$\Leftrightarrow z_0 \underbrace{BIN(n_1)}_{\{0,1\}^*} \# \ldots \# BIN(n_k) \vdash_M^* \square^* z \, BIN(m) \square^*$$

für ein $z \in E$

hierbei $BIN(n) :=$ Binärdarst. von n

<u>Def.</u> Eine Funktion $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ heiß <u>Turing-berechenbar</u>

gdw. es eine DTM M gibt derart, dass

für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(x) = y \quad \text{gdw.} \quad z_0 x \vdash_M^* \square^* z y \square^*$$

für ein $z \in E$

Bsp. • Nachfolgerfktn. $succ: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
bzw. $succ: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*: BIN(n) \mapsto BIN(n+1)$
Turingberechenbar!

• Die nirgends def. Fkt. Ω ist Turing-berechenbar
(– (Totschleife)
– „Blockade")

Eine formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann vom Typ-0, wenn die Fkt:

$$\chi'_L : \begin{cases} \Sigma^* \to \{1\} \\ w \mapsto \begin{cases} 1 & , w \in L \\ - & , w \notin L \end{cases} \end{cases}$$

undefiniert

Turing berechenbar.

(also charakteristische Fkt. $\chi_L : \begin{cases} \Sigma^* \to \{0,1\} \\ w \mapsto \begin{cases} 1 & , w \in L \\ 0 & , w \notin L \end{cases} \end{cases}$

„partiell" (Turing-) berechenbar ist.)

Halteproblem / Unentscheidbarkeit / Reduzierbarkeit

Def.

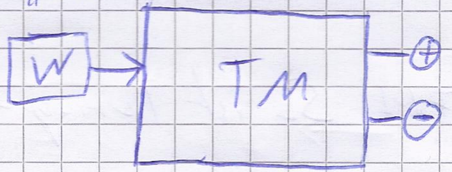
a) Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt entscheidbar, falls ihre char. Fktn χ_A berechenbar ist
total!

b) $A \subseteq \Sigma^*$ heißt semi-entscheidbar falls die „eingeschränkte char.-Fkt." χ'_A berechenbar ist.
partiell!

Bildlich:

Entscheidbar vs. Semi-Entscheidbar

„das was wir wollen" „das was betrachtbar ist"



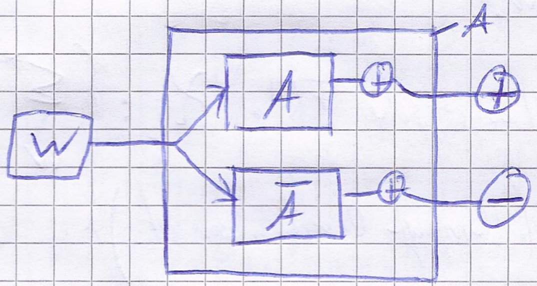
nach endlicher Zeit leuchtet genau eine Lampe auf (⊕ oder ⊖)

Es kann passieren, dass ⊕ nie leuchtet.

Satz:

$A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl A als auch $\Sigma^* \setminus A =: \overline{A}$ semi-entscheidbar sind.

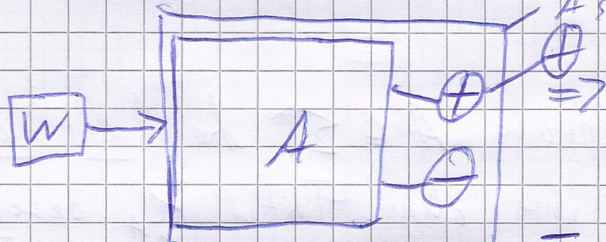
„$\Leftarrow$": Annahme: A und $\overline{A}$ semi-entscheidbar.



$\boxed{A}$ und $\boxed{\overline{A}}$ müssen parallel laufen!

„$\Rightarrow$": Annahme: A ist entscheidbar.

A semi entscheidbar



$\Rightarrow A$ semi-entscheidbar (ignoriere ⊖-Signal)

$\overline{A}$ semi-entscheidbar.

Def. $A \subseteq \Sigma^*$ heißt <u>rekursiv aufzählbar</u> falls $A = \emptyset$ gilt oder falls es eine totale berechenbare Funktion $f: \mathbb{N} \to \Sigma^*$ gilt, derart, dass

$$A = \{ f(0), f(1), f(2) \ldots \} = f(\mathbb{N})$$

„f zählt A auf."